

6. Derived Category and

Canonical Bundle - II

前半

◦ $R(X) = \bigoplus_{l \geq 0} H^0(X, \omega_X^l)$: 標準環

◦ $(X \text{ が連結な }) \Rightarrow X$ は整域.

◦ $\text{kod}(X) = \begin{cases} -\infty & \text{if } R(X) = \mathbb{C} \\ \text{tr. deg}_{\mathbb{C}} \text{Frac } R(X) - 1 & \text{else.} \end{cases}$
 小平次元 $\leq \dim X$.

◦ $L \in \text{Pic}(X)$ は nef $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varphi: \overset{\text{完備, 被約曲線}}{C} \rightarrow X, \deg \varphi^* L \geq 0$
 $\iff \forall \varphi: \overset{\square}{C} \subseteq X, \text{ --- } \dashrightarrow$
 $\iff \forall \varphi: \overset{\text{sm. irr.}}{C} \rightarrow X, \text{ --- } \dashrightarrow$

◦ $L \in \text{Pic}(C)$ に対し 次数 χ $\implies \text{const.}$ $\therefore$ 定義した.

$$\chi(C, L^{\otimes l}) \stackrel{\text{RR}}{=} \deg(L) \cdot l + \chi(C, \mathcal{O}_C)$$

Lem.

$$D^b(X) \simeq D^b(Y) : \Phi_{\mathcal{Q}}^{Y \rightarrow X} \text{ が異同値なら}$$

$$\Phi_{\mathcal{Q}}^{X \rightarrow Y} : D^b(X) \rightarrow D^b(Y) \text{ も異同値.}$$

prf. $\Phi_{\mathcal{Q}}^{Y \rightarrow X}$ の逆エフェクター F-M $\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y}$ を作る.

$$\begin{array}{ccc} D^b(X) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y}} & D^b(Y) \\ \downarrow \Phi_{\mathcal{Q}} = \text{Id}_{D^b(X)} & & \downarrow \\ D^b(X) & \xleftarrow{\Phi_{\mathcal{Q}}^{Y \rightarrow X}} & D^b(Y) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(FM の合成)} \\ \\ = \Phi_{\mathcal{R}}, \mathcal{R} \\ = \pi_{13*}(\pi_{12}^* \mathcal{P} \otimes \pi_{13}^* \mathcal{Q}) \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{一意性}]{\text{kernel の}} \mathcal{O}_{\Delta} \cong \mathcal{R}.$$

◦ $\tau_{12} : X \times X \rightarrow X \times X$: 成り立たない.

$$\mathcal{O}_{\Delta} \cong \tau_{12}^* \mathcal{O}_{\Delta} \cong \tau_{12}^* \mathcal{R}$$

$$\begin{aligned} &\cong \tau_{12}^* \pi_{13*} \left\{ \begin{array}{l} \pi_{12}^* \mathcal{P} \otimes \pi_{13}^* \mathcal{Q} \\ \pi_{13}^* \tau_{12}^* \left\{ \begin{array}{l} \pi_{12}^* \mathcal{P} \otimes \pi_{13}^* \mathcal{Q} \\ \pi_{12}^* \mathcal{Q} \otimes \pi_{13}^* \mathcal{P} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \\ &\cong \pi_{13*} \tau_{12}^* \left\{ \begin{array}{l} \pi_{12}^* \mathcal{P} \otimes \pi_{13}^* \mathcal{Q} \\ \pi_{12}^* \mathcal{Q} \otimes \pi_{13}^* \mathcal{P} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} X \times X \times X & \xrightarrow{\pi_{13}} & X \times X \\ \tau_{13} \swarrow \quad \searrow & \lrcorner & \swarrow \quad \searrow \tau_{12} \\ X \times X \times X & \xrightarrow{\pi_{13}} & X \times X \end{array} \right.$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} D^b(X) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{Q}}^{X \rightarrow Y}} & D^b(Y) \\ & & \downarrow \text{Id}_{D^b(X)} \\ D^b(X) & \xleftarrow{\Phi_{\mathcal{P}}^{Y \rightarrow X}} & D^b(Y) \end{array} \right] \text{ i.e. } \left[\begin{array}{ccc} D^b(X) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{Q}}^{X \rightarrow Y}} & D^b(Y) \\ & & \downarrow \text{Id}_{D^b(X)} \\ D^b(X) & \xleftarrow{\Phi_{\mathcal{P}}^{Y \rightarrow X}} & D^b(Y) \end{array} \right]$$

• エ逆順に作る, $\Phi_{\mathcal{Q}}^{X \rightarrow Y} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{Y \rightarrow X} = \text{Id}_{D^b(Y)}$ も成り立つ.

□

Prop. 6.1 (Orlov)

$$D^b(X) \simeq D^b(Y)$$

$$\Rightarrow R(X) \cong R(Y) : \text{環同型.}$$

pr.f. $\Phi_{\mathcal{Q}}^{X \rightarrow Y} : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$ 複素圏同値を与えたとする.

Lem. #1) 逆 $D^b(X) \xleftarrow{\sim} D^b(Y) : \Phi_{\mathcal{Q}}^{Y \rightarrow X}$ を考えたと

$\Phi_{\mathcal{Q}}^{X \rightarrow Y} : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$ も圏同値を与えたと.

$$X \times X \quad D^b(X \times X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y \times Y) : \text{これ(≠)圏同値.}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \text{特異} \\ X \end{array}$$

$$\uparrow L_*$$

$$D^b(X) \ni \omega_X^k$$

$$\Phi_{\mathcal{Q} \boxtimes \mathcal{Q}} \quad \downarrow \quad \mathcal{Y}$$

$$\mathcal{Y} \text{ とおく.}$$

$$(\mathcal{Q} \boxtimes \mathcal{Q}) * (\mathcal{Q} \boxtimes \mathcal{Q})$$

$$= (\mathcal{Q} * \mathcal{Q}) \boxtimes (\mathcal{Q} * \mathcal{Q})$$

$$= \mathcal{O}_{\Delta}$$

$$D^b(X) \xleftarrow[\sim]{\Phi_{\mathcal{Q}}^{Y \rightarrow X}} D^b(Y)$$

$$S_X^k[-kn] \xrightarrow[\text{S.4(v)}]{\text{Ex. 13}} \downarrow \Phi_{L_* \omega_X^k} \quad \downarrow \Phi_{\mathcal{Q}}$$

$$D^b(X) \xrightarrow[\sim]{\Phi_{\mathcal{Q}}^{X \rightarrow Y}} D^b(Y)$$

Serre func. を与へた

... 圏同値と交換

$$\xrightarrow{\quad} \Phi_{\mathcal{Q}} = S_Y^k[-kn] \xrightarrow[\text{S.4}]{\text{Ex. 13}} \Phi_{L_* \omega_Y^k}$$

$$\leadsto \mathcal{Y} = L_* \omega_Y^k$$

$$\hookrightarrow \Phi_{\mathcal{Q} \boxtimes \mathcal{Q}}(L_* \omega_X^k) = L_* \omega_Y^k \quad \Phi_{\mathcal{Q} \boxtimes \mathcal{Q}} : \text{圏同値 (特に f.f.) により}$$

$$\begin{array}{l} f=0 \\ l \geq 0 \end{array} \quad \text{Hom}_{X \times X}(L_* \omega_X^k, L_* \omega_X^l) = \text{Hom}_{Y \times Y}(L_* \omega_Y^k, L_* \omega_Y^l)$$

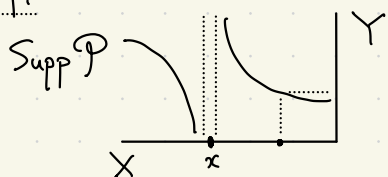
$$H^0(X, \omega_X^l) = H^0(Y, \omega_Y^l)$$

乘法構造が毎いれは B-O reconstruction と同様.

□

Lem. 6.4 射影 $\text{Supp}(\mathcal{P}) \xrightarrow{q} X$ は全射.

prf.



$x \in X \setminus q(\text{Supp } \mathcal{P})$ があると、

$$\text{Supp } \mathcal{P} \cap \text{Supp}(q^*k(x)) = \emptyset.$$

$$= \bigcup \text{Supp } \mathcal{H}^i.$$

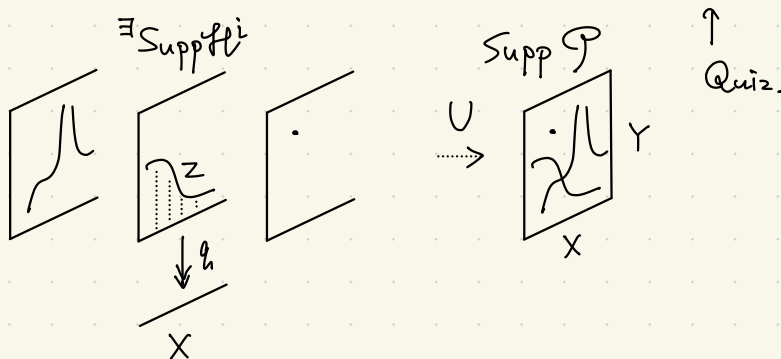
$$E_2^{r,s} = \text{Tor}_{-r}(\mathcal{H}^s, q^*k(x)) \Rightarrow \text{Tor}_{-(res)}(\mathcal{P}, q^*k(x))$$

$\uparrow$
 Supp がい非交

$$\underbrace{\hspace{10em}} = 0.$$

$\leadsto \mathcal{P} \otimes q^*k(x) = 0$ かつ $\Phi_{\mathcal{P}}(k(x)) = 0$ であるから $\square$.

Cor. 6.5 $\exists i, \exists Z \subseteq \text{Supp } \mathcal{H}^i$: irr. comp, $Z \xrightarrow{q} X$.



X と Y を入れかえて全く同様の結果が成立する.

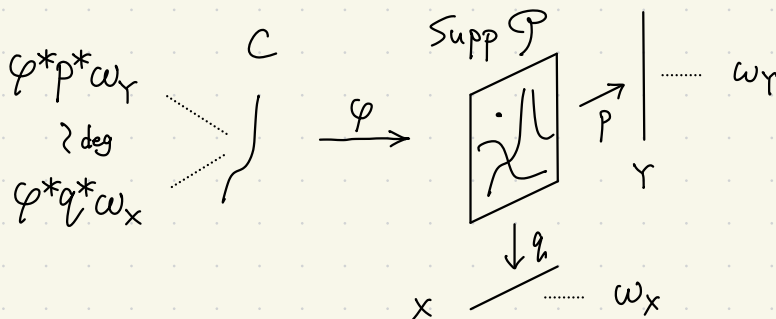
Lem. 6.6

C : 完備, 被約曲線,

$\varphi: C \rightarrow X \times Y$: 像 $\in \text{Supp } \mathcal{P}$.

$$\Rightarrow \deg \varphi^* q^* \omega_x = \deg \varphi^* p^* \omega_Y$$

i.e. $q^* \omega_x|_{\text{Supp } \mathcal{P}} \equiv p^* \omega_Y|_{\text{Supp } \mathcal{P}}$: numerically equivalent.



prf. C : sm. irr. $\hookrightarrow C \not\subset \text{supp } \mathcal{P} \sim \exists i \sim \varphi(C) \in \text{Supp } \mathcal{H}^i$.

$$0 \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \varphi^* \mathcal{H}^i \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

torsion part $\xrightarrow{\text{pullback}}$ torsion-free part $\xrightarrow{\text{sm. irr. curve}} \text{loc. free.}$

$r := \text{rk } \mathcal{F} > 0$. $\left(\because \eta: C \cap \text{generic pt. } \varphi(\eta) \in \text{Supp } \mathcal{H}^i \text{ i.e. } \mathcal{H}^i_{\varphi(\eta)} \neq 0. \right.$
 $\left. (\varphi^* \mathcal{H}^i)_{\eta} = \mathcal{H}^i_{\varphi(\eta)} \otimes_{\mathcal{O}_{\varphi(\eta)}} k(C) \stackrel{\text{NAK}}{\neq} 0. \right.$

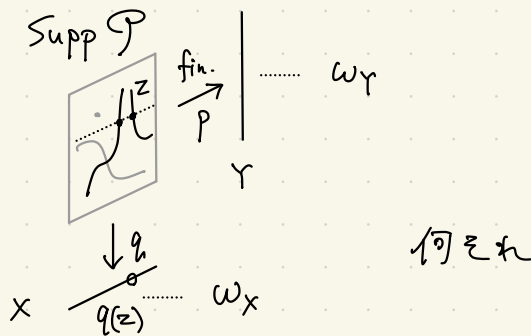
$$\begin{array}{l} \Phi \varphi: \text{equiv.} \rightarrow \mathcal{P} \otimes q^* \omega_x = \mathcal{P} \otimes p^* \omega_Y \\ \otimes q^* \omega_x: \text{ex. } \downarrow \mathcal{H}^i \otimes q^* \omega_x = \mathcal{H}^i \otimes p^* \omega_Y \\ \varphi^* \downarrow \varphi^* \mathcal{H}^i \otimes \varphi^* q^* \omega_x = \varphi^* \mathcal{H}^i \otimes \varphi^* p^* \omega_Y \\ \text{tor. free part } \downarrow \mathcal{F} \otimes \varphi^* q^* \omega_x = \mathcal{F} \otimes \varphi^* p^* \omega_Y \\ \wedge^r \downarrow \det \mathcal{F} \otimes \varphi^* q^* \omega_x^r = \det \mathcal{F} \otimes \varphi^* p^* \omega_Y^r \\ \det \mathcal{F}: \text{可逆 } \downarrow \varphi^* q^* \omega_x^r = \varphi^* p^* \omega_Y^r \\ \deg \downarrow r \deg(\varphi^* q^* \omega_x) = r \deg(\varphi^* p^* \omega_Y) \xrightarrow{r \neq 0} \square. \end{array}$$

Cor. 6.7 $\omega_X \equiv 0 \iff \omega_Y \equiv 0$

prf. $\omega_X \equiv 0 \Rightarrow q^* \omega_X|_{\text{Supp } \mathcal{P}} \equiv 0$
 $\xrightarrow{\text{Lem. 6.6}} p^* \omega_Y|_{\text{Supp } \mathcal{P}} \equiv 0$
 $\xrightarrow{\text{Lem. 6.4 (} p|_{\text{Supp } \mathcal{P}} : \text{sur.)}}$
 $\xrightarrow{\text{Lem. 6.2 (} \text{proj. surj.}^* L \equiv 0 \Rightarrow L \equiv 0)}$
 $\iff \omega_Y \equiv 0 \quad \square$

Cor. 6.8 $Z \subseteq \text{Supp } \mathcal{P} : \text{cl. subvar.},$

$\omega_X|_{q(Z)}$ is ample or anti-ample $\nleftrightarrow p|_Z$ is finite.



prf. fin. τ is not true. $\exists$ irr. curve $C \xrightarrow{\varphi} Z$ s.t. $p|_C$ is not finite, i.e. $p \circ \varphi : \text{const.}$
 $\leadsto \varphi^* p^* \omega_Y$ is not trivial, so $\varphi^* q^* \omega_X \equiv 0$.
 C is not q -finite, i.e. $q \circ \varphi : \text{non-const.}$
 $\leadsto (q \circ \varphi)^* \omega_X : \text{ample or anti-ample.} \quad \square$
 $\widetilde{\text{fin. surj. as}} : C \rightarrow q(\varphi(C))$

Lem. $Z : \text{nor. var.} / k : \text{field.}$ $\mathcal{F} : \text{coh. on } X$, $\text{gen. rk} = r$.

$$L_1, L_2 \in \text{Pic}(Z), \quad \mathcal{F} \otimes L_1 = \mathcal{F} \otimes L_2 \nRightarrow L_1^r \cong L_2^r.$$

prf. $\mathcal{F} : \text{torsion-free}$ とし L とし.

$Z : \text{normal}$ とし $\text{codim } Z^{\text{sing}} \geq 2$ とし. $U = Z - Z^{\text{sing}}$ とし. $\mathcal{F}|_U : \text{loc. free.}$

$$\det(\mathcal{F} \otimes L_i|_{U_i}) = \det(\mathcal{F}|_{U_i}) \otimes L_i^r|_U \text{ とし } L_1^r|_U \cong L_2^r|_U.$$

自明化 $s \in H^0(U, L_1^r \otimes L_2^{-r})$ とし

$$s \in H^0(Z, L_1^r \otimes L_2^{-r})$$

にのちるので、 $L_1^r \cong L_2^r$.

3.20. Y を次元が 2 以上である多様体として、 $P \in Y$ を正則点とする。 f を $Y - P$ 上の正則関数とする。

(a) f が Y 上の正則関数に延びることを示せ。

3.5. X を Noether スキームとし、 P を X の閉点とする。次の条件が同値であることを示せ。

(i) $\text{depth } \mathcal{O}_P \geq 2$;

(ii) U を P の任意の開近傍としたとき、 $U - P$ 上の $\mathcal{O}_X$ のすべての切断は U 上の $\mathcal{O}_X$ の切断に一意的に延長される。

これは、(II, 8.22A) を考慮すれば (I, Ex. 3.20) の一般化である。

Lem. 6.9 $Z \subseteq \text{Supp } \mathcal{P} : \text{irr. subvar}$, $\mu : \tilde{Z} \rightarrow Z : \text{正則化}$

$$\exists r > 0, \quad \mu^* q^* \omega_X^r \cong \mu^* p^* \omega_Y^r$$

$$\begin{array}{c} \mu^* p^* \omega_Y^r \\ \cong \\ \mu^* q^* \omega_X^r \end{array} \quad \begin{array}{c} \tilde{Z} \\ \searrow \mu \\ \mathcal{P} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Supp } \mathcal{P} \\ \boxed{\mathcal{P}} \\ \downarrow q \\ X \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow p \\ \downarrow r \\ Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \omega_Y^r \\ \dots \omega_X^r \end{array}$$

prf.

$Z \subseteq \text{Supp } \mathcal{H}^i$ とし i を取れば、 $\mu^* \mathcal{H}^i$ は $\text{gen. rk} > 0$.

$\mathcal{H}^i \otimes q^* \omega_X \cong \mathcal{H}^i \otimes p^* \omega_Y \in \mu^{-1}(\text{pt})$ と展す Lem. 6.9 従う。

Ex. 6.10 $\text{Supp } \mathcal{P} = X \times Y$ 全体 とし $\tilde{Z} = Z = X \times \{\text{pt}\}$ とすれば

$$\omega_X^r = (q \circ \mu)^* \omega_X^r = (p \circ \mu)^* \omega_Y^r = \text{triv.} \quad \text{と } \omega_X : \text{fin. order.}$$

Lem. 6.11 射影 $\text{Supp}(\mathcal{P}) \xrightarrow{q} X$ のファイバーは連結.

i.e. $\rightarrow Y$ のファイバーも連結.

prf. $x \in X$ 上のファイバーが 不連結 だとする.

$$\text{Supp } \mathcal{P} \cap \{x\} \times Y = \{x\} \times Y_1 \cup \{x\} \times Y_2$$

$$\text{Supp}(\mathcal{P}|_{\{x\} \times Y}) \text{ 上}$$

$$\Phi_{\mathcal{P}}(k(x)) = p_*(\mathcal{P} \otimes q^*k(x))$$

$$= p_* \mathcal{P}|_{\{x\} \times Y} : \text{台が不連結.}$$

$$\text{Lem. 3.9} \\ = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \quad (\text{Supp } \mathcal{F}_i = Y_i)$$

$\text{End } \Phi_{\mathcal{P}}(k(x))$ は体でないが、 $\text{End } k(x)$ は体. f.f. に矛盾. $\square$

Cor. 6.12 $Z \subseteq \text{Supp } \mathcal{P} : q(Z) = X$ なる irr. comp.

$\dim Z = \dim X$ なる $q : Z \rightarrow X$ は双有理.

さらに、そのような Z があつたとき、他の irr. comp. は X を支配しない (i.e. generic fiber は 1 点).

prf. $\eta : X$ の生成点

(後半) $\text{Supp } \mathcal{P} = Z \cup \bigcup Z_i \xrightarrow{q} X$ の gen. fiber は $Z_{\eta} \cup (\bigcup (Z_i)_{\eta})$ だが.

Lem. 6.11 より 連結のため.

$$\dim Z = \dim X \text{ かつ } \dim(Z \cap Z_i) < X.$$

よって $(Z_i)_{\eta}$ は Z と交わらない.

(前半) $\leftarrow$ 必ずある稠密開集合でファイバー Z_x は有限点.

3.7. 射 $f : X \rightarrow Y$ で、 Y が既約であるものは、 $f^{-1}(\eta)$ が有限集合であるとき生成点で有限 (generically finite) という. ここで η は Y の生成点である. 射 $f : X \rightarrow Y$ は $f(X)$ が Y で稠密であるとき支配的 (dominant) という. さて、 $f : X \rightarrow Y$ を有限型整スキームの間の支配的、生成点で有限な有限型の射とする. 稠密な開部分集合 $U \subseteq Y$ があって、誘導された射 $f^{-1}(U) \rightarrow U$ が有限であることを示せ. [ヒント: はじめに X の函数体は Y の函数体の有限体拡大であることを示せ.]

$\dim Z \cap Z_i < \dim X$ かつ Z_x は

$(Z_i)_x$ と交わらないようにして.

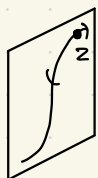
$Z_x = (\text{Supp } \mathcal{P})_x : \text{conn. かつ 1 点.}$

$\dim = 0 \rightarrow$ 関数体拡大は 1 次で双有理 $\square$

Cor. 6.14

閉点 $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ があり $\Phi_{\mathcal{F}}(k(x_0)) = k(y_0)$ ならば
ある近傍 $U \subseteq X$ と $f: U \rightarrow Y$ があり
 $f(x_0) = y_0$ かつ 任意の $x \in U$ で $\Phi_{\mathcal{F}}(k(x)) = k(f(x))$.

prf.



$\text{Supp } \mathcal{F} \xrightarrow{f} X$ の x_0 上の fiber Z は 0次元.

$\xrightarrow{6.12} \text{---} \text{---} \exists U \text{---} \text{---}$

$\leadsto x \in U$ ならば $\Phi_{\mathcal{F}}(k(x))$ は point-like.

$\leadsto \exists! y_x, m_x \text{ s.t. } k(y)[m_x]$.

$$\delta_{im_x} = \dim_{k(y)} h^i(k(y)[m_x])$$

$$= \dim_{k(y)} R^i q_* (\mathcal{P} \otimes p^* k(x))$$

$$= \dim_{k(y)} R^i q_* (\mathcal{P}|_Z)$$

$$\begin{aligned} x = x_0 \text{ ならば} \\ \dim Z = 0 \end{aligned}$$

$$\delta_{io} \xrightarrow{\text{連続}}$$

$$\forall x \in U' \quad m_x = 0.$$

Cor. 5.23 Z 同様にして f の構造が示した.

□